VLMC et marche aléatoire "persistante"
Boole 20 juin 2013

Intérêts méthodologiques :

• rappel $\boxed{\text{VLMC}}$, généralisation d'une
voir ou revoir
chaîne de Markov sur les lettres d'un alphabet.
Une "source VLMC" génère des lettres fortement dépendantes.

• rappel $\boxed{\text{marche aléatoire}}$ dont les incréments sont des lettres. Que se passe-t-il
en fait nombres $\{0,1\}$
quand les lettres sont fortement dépendante ?
On va voir que la marche n'est plus markovienne. Mais si on couple la marche avec sa "mémoire", alors redevient Markov.

• Peut-on naviguer de l'un à l'autre en transportant les lois de proba ?

• Quid de la $\boxed{\text{renormalisation}}$ de la marche al. Rappel marche simple $\longrightarrow$ Br.
marche VLMC $\longrightarrow$??

1. Marche

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a à valeurs réelles. La marche al[éatoire]
noms : alphabet → nombres $\{0,1\}$
d'incréments $(X_n)_{n\geq 0}$ est définie par $\forall t \in \mathbb{N}$ (t entier ≥ 0)

$$\boxed{S_t = \sum_{n=0}^{t} X_n}$$

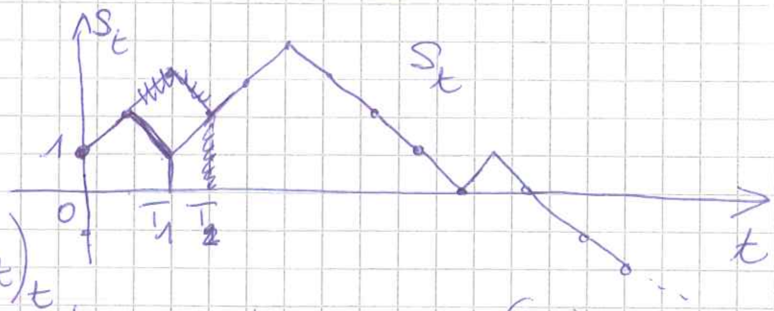
Cadre habituel :

les $(X_n)_{n\geq 0}$ sont iid.

Cas part très classique : (X_n) iid à val $\{-1,+1\}$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

" Marche simple "



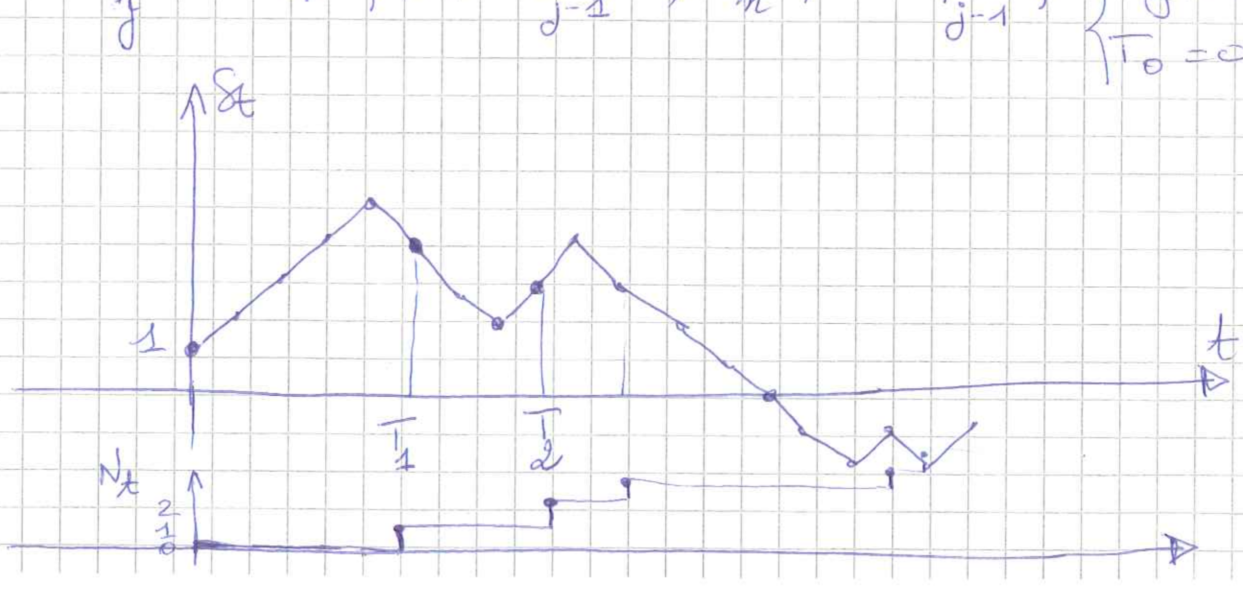
$S_0 = X_0$

Th de Donsker (1951) $\left(S_{[nt]}/\sqrt{n}\right)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_t)_t$

~~On sait que~~

On introduit les instants de cassure $(T_n)_{n\geq 1}$ (supposons que $S_0 = X_0 = 1$) comme sur le dessin.

$$T_1 = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq 1\}$$
$$T_2 = \inf\{n \geq T_1,\ X_n \neq X_{T_1}\}$$
$$T_j = \inf\{n \geq T_{j-1},\ X_n \neq X_{T_{j-1}}\} \quad \left\{\begin{array}{l} j \geq 1 \\ T_0 = 0 \end{array}\right.$$



Et on introduit le processus de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ qui compte ~~dont~~ les sauts ~~sont~~ ~~les~~ T_n :

$$N_t = \sup \{ n \geq 1 , T_n \leq t \}$$

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}$$

de sorte que $\boxed{S_t = \sum_{n=0}^{t} (-1)^{N_n}}$

Tout cela est "mécanique", ne dépend pas des lois mises sur les incréments $(X_n)_{n \geq 0}$.

Q : que se passe-t-il quand les (X_n) ne sont plus iid cad quand X_{n+1} dépend de X_n par ex ?

Courte dépendance : Hermann Vallois (2016)

(X_n) chaîne de Markov d'ordre 1 ie X_{n+1} dépend de X_n via des proba de transition

Ils ont appelé la ~~chaîne~~ marche "persistante"

Trouvé la loi de S_t

Montré que

Th $S^\varepsilon(t) := \varepsilon S_{t/\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{L}} S^0(t)$ processus zigzag.

hyp sur la marche

~~sol de~~ relié à une equ dite "equ du télégraphe". pr du télégraphe

Longue dépendance X_{n+1} dépend des $X_n, X_{n-1}, \ldots$ d'un nombre variable de X_i dans le passé.

$\hookrightarrow$ modèle de marche VLMC.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$\mathbb{E} u(x, S_t) = w(x,t)$

si u sol d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$$

2. Chaîne $\boxed{\text{VLMC}}$. Marche VLMC | $\mathcal{A} = \{0,1\}$

(0) Décrit la façon dont les lettres $(X_n)_{n \geq 0}$ sont dépendantes = comment X_{n+1} dépend du passé =

passé = $U_n = \cdots X_0 X_1 X_2 \cdots X_n$

mot infini à gauche

$U_{n+1} = U_n X_{n+1} = \cdots X_0 \cdots X_n X_{n+1}$

(2) Une VLMC est une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ de mots infinis à gauche, qui a pour transitions

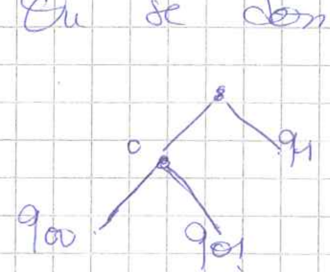
$$\boxed{\mathbb{P}\left(U_{n+1} = U_n \alpha \mid U_n\right) = q_{\overleftarrow{\text{pref}}(U_n)}(\alpha)}$$

$\forall \alpha$ = lettre de l'alphabet

Une VLMC est définie par les $(q_c)_{c \in \mathcal{C}}$

où
- $\mathcal{C}$ est un ensemble de "contextes" ie de mots / feuilles d'un arbre dit arbre de contexte
- $\forall c$ contexte, q_c est une loi de Bernoulli

(1) On se donne un arbre binaire complet



On appelle $\mathcal{C}$ = {feuilles}

On met des lois de Bernoulli aux feuilles

$q_1(0) = 1 - q_1(1)$ donné

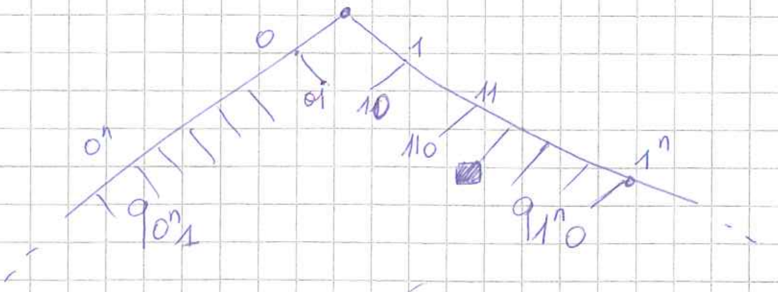
$\left(\mathcal{C}, (q_c)_{c \in \mathcal{C}}\right)$ arbre de contexte probabilisé

Soit U_n un mot infini à gauche

$U_n = \cdots 110\boxed{10}$ $\quad \overleftarrow{\text{pref}}(U_n) = 01$

transition :

5) Exemple de VLMC : le double peigne



Définie par $\left(\mathcal{T}, q_{0^n1}, q_{1^n0}, n \geq 1\right)$

$$\mathbb{P}\left(U_{n+1} = U_n \alpha \mid U_n\right) = q_{\overleftarrow{\text{pref}}(U_n)}(\alpha)$$

$U_n = \dots 01000111$ $\qquad \overleftarrow{\text{pref}}\, U_n = 1110$ ■

La transition est déf par ~~la~~ longueur du dernier run de 1 ou de 0.

th (CCPP+) ‖ $\exists !$ mes stationnaire pour (U_n) sous cond NS complètement décrite.

Marche VLMC associée au double peigne :

$$S_{k+1} = \sum_{k=0}^{k} X_k$$ où (X_k) sont les lettres produites par une VLMC double peigne.

$$\mathbb{P}\left(S_{k+1} = S_k + \alpha \mid S_k\right) = q_{\overleftarrow{\text{pref}}\, U_k}(\alpha) \quad ??$$

ne dépend pas que de X_k mais aussi de la longueur du run.

↪ intro de (Marche avec mémoire) :

On considère (X_n, Y_n)

processus des lettres — mémoire (du dernier run)

qui évolue de la façon suivante :

$$Y_n = \left|\overleftarrow{\text{pref}}(U_n)\right| - 1$$

si $(X_n, \eta_n) = (1, k)$ $\longrightarrow$ $(1, k+1)$ avec proba $q_{1^k 0}(1)$

$\searrow$ $(0, 1)$ avec proba $1 - q_{1^k 0}(1) = q_{1^k 0}(0)$

si $(X_n, \eta_n) = (0, k)$ $\longrightarrow$ $(0, k+1)$ pr $q_{0^k 1}(0)$

$\searrow$ $(1, 1)$ pr $q_{0^k 1}(1)$

(X_n, η_n) est une chaîne de Markov

NB on peut faire l'inverse $\doteq$ définir la chaîne (X_n, η_n) par ses pr. de transition $(\alpha_{1,k})_{k \geq 1}$ $(\alpha_{0,k})_{k \geq 0}$ puis définir le double peigne probabilisé par ces 2 suites.

Th || $\exists !$ mes stat pour (X_n, η_n) sous CNS

$$\underbrace{\sum_{n \geq 0} \overbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} q_{0^k 1}(0) \right)}^{c_n^{(0)}}}_{\Theta_2} < \infty \quad \text{et} \quad \underbrace{\sum_{n \geq 0} \overbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} q_{1^k 0}(1) \right)}^{c_n^{(1)}}}_{\Theta_1} < \infty$$

Dans la suite on se place sous cet mes stat. π

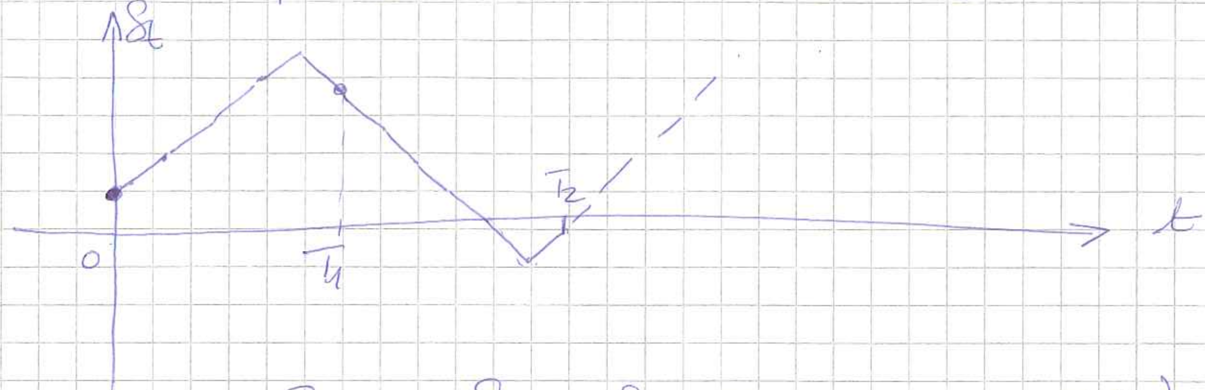
Q : • loi de (S_t)

• renormalisation

7/ (7)

Reprenons cette marche

$\{0,1\} \rightarrow \{-1,1\}$.



$S_t \longrightarrow S_{t+1} = S_t + \alpha \qquad \alpha \in \{-1,+1\}$.

proba qui dépend de $\begin{cases} X_t \\ N_t \end{cases}$

(T_n) et (N_t) compte les virages.

Idées / Résultats

(1) la loi de (S_n) est très compliquée

Plus facile = loi de (S_τ) où τ est un temps aléatoire, $\tau \stackrel{loi}{=} \text{geom}(\rho) \quad \rho \in]0,1[$

$$\mathbb{P}(\tau = k) = \rho^k (1-\rho) \quad , k \geq 0$$

On calcule $\boxed{\mathbb{E}(\lambda^{S_\tau})}$ la f° gen de S_τ

[un peu compliqué, mais explicite en fonction des $q_{0,1}^k(0)$ $q_{1,0}^k(1)$

(2) Comportement asymptotique de S_n, $n \to +\infty$

Th (LLN) $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[L^1]{ps} \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} = \ell$

(CLT) si $\sum k c_k < \infty$ $\dfrac{1}{\gamma\sqrt{n}}(S_n - n\ell) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Rem même comportement que cas iid

sauf si $\sum k q_k = +\infty$ → on sait pr mélange plus faibles

→ ?? comportement $n \to \infty$ ouvert

Preuve (X_n, T_n) est rec ind

8)

Renormalisation

$f_1 = f_2 = 1$

On fait dépendre les proba de transition de ε de sorte que $q_{0^\varepsilon 1}(1)$ et $q_{1^\varepsilon 0}(0)$ (les probas de changer) soient petites

Soit $(N^0(t))_t$ un pr. de Poisson de par 1

Soit $m(t) = t - T_{N^0(t)}$ pr de l'âge.

Soit $S^0(t) = \int^t (-1)^{N^0(s)} ds$

ITN process (Integrated Telegraph Noise)

Th

$S^\varepsilon(t) := \varepsilon S_{t/\varepsilon}$ $t \in \varepsilon \mathbb{N}$

$(S^\varepsilon(t))_t \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{\mathcal{L}} (S^0(t))_t$,

- On a un peu plus : conv de $(S^\varepsilon(t), X^\varepsilon(t), M^\varepsilon(t))$ $\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (S^0(t), (-1)^{N^0(t)}, m(t))$.

  $X_{t/\varepsilon}$ $\varepsilon M_{t/\varepsilon}$

Les suites des intervalles de temps entre 2 virages εT_1, $\varepsilon(T_2 - T_1)$, ..., $\varepsilon(T_n - T_{n-1})$ $\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (e_1, \dots, e_n)$

Exp(1) iid.

- on peut généraliser un peu :
  (e_i) un peu plus généraux